

مبحث : وارون ماتریس

نام دبیر: مهندس سامان اسپهرم
نام دوره: نوروز
شماره جلسه: جلسه دوم
نام درس و مقطع و رشته: هندسه ۳ - دوازدهم
ریاضی، فیزیک
تاریخ جلسه: ۱۴۰۲/۱/۹

نام کتاب	من در کلاس حل می کنم				خودتان حل کنید (در منزل یا کار در کلاس)			
کتاب درسی								
کتاب آبی					۷۲	۸۷	۹۰	۹۸
کتاب نوروز					۶۲۳	۶۳۱	۶۳۲	



نکته

وارون ماتریس:

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، ماتریس B هم مرتبه‌ی آن «وارون» یا «معکوس» A است، هرگاه:

$$AB = BA = I$$

در این صورت B با A^{-1} نشان داده می‌شود؛ واضح است که A هم معکوس B است.

❓ اگر A و B دو ماتریس بوده و A معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $(A^{-1}BA)^T$ کدام است؟

④ $AB^T A^{-1}$

③ $A^{-1}B^T A$

② I

① $A^{-1}BA$

❓ اگر A یک ماتریس مربع با شرط $A^T = \lambda I$ باشد، ماتریس $(A - I)^{-1}$ کدام است؟

④ $I + A$

③ $A - I$

② A^T

① I

❓ ماتریس‌های A و B هم مرتبه و وارون‌پذیر بوده و داریم $A - B = -3AB$. آنگاه $B^{-1} - A^{-1}$ کدام است؟

④ $-I$

③ $-3I$

② $3I$

① I

❓ اگر $A - B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ و $|AB| = -3$ باشد، دترمینان ماتریس $A^{-1} - B^{-1}$ کدام است؟

④ 3

③ 1

② -1

① -3

نکته

وارون ماتریس 2×2 :

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داده شده باشد:

❖ شرط این که ماتریس A دارای معکوس باشد این است که:

$$|A| = ad - bc \neq 0$$

❖ در این صورت معکوس A از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

توجه کنید:

شرط وارون‌پذیری ماتریس مربع A از هر مرتبه‌ای این است که $|A| \neq 0$ باشد.



نکته

کاربرد اصلی:

مهم‌ترین کاربرد ماتریس معکوس در حل معادلات ماتریسی است.

فرض کنید داشته باشیم: $AB = C$

▪ برای تعیین A ، کافی است B^{-1} را از راست در دو طرف تساوی ضرب کنیم:

$$AB = C \rightarrow ABB^{-1} = CB^{-1} \Rightarrow A = CB^{-1}$$

▪ برای تعیین B ، کافی است A^{-1} را از چپ در دو طرف تساوی ضرب کنیم:

$$AB = C \rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}C \Rightarrow B = A^{-1}C$$

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ و ماتریس X در رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & | & A \\ 1 & | & \frac{2}{|A|} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ صدق کند، کوچک‌ترین

درایه‌ی قطر اصلی ماتریس X کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

- ① -۱۵ ② -۳ ③ ۶ ④ ۸

❓ از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس A کدام است؟ (کنکور ۹۲)

- ① $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

نکته

ویژگی‌های وارون:

▪ اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد، آنگاه: $(A^{-1})^{-1} = A$.

▪ معکوس ماتریس همانی خودش است، یعنی: $I^{-1} = I$.

▪ توان و وارون را می‌توان جابجا کرد:

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

▪ اگر ماتریس‌های A و B معکوس‌پذیر باشند، ماتریس AB نیز معکوس‌پذیر است و:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

▪ **مهم:** اگر ماتریس A معکوس‌پذیر و r عددی غیرصفر باشد، آنگاه: $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$.

خاصیت ویژه:

برای ماتریس معکوس‌پذیر A همواره داریم: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

❓ اگر $(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A(A - 2I)^{-1}$ کدام است؟

- ① ۱۱ ② ۹ ③ ۵ ④ ۱۶

❓ اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۲ بوده، $|A + B| = ۵$ و $|B| = ۲$ باشد، دترمینان ماتریس $AB^{-1} + I$ کدام است؟

- ① ۱۰ ② $\frac{۲}{۵}$ ③ $\frac{۵}{۲}$ ④ ۵



❓ اگر $A^2 - I = -A$ باشد، وارون ماتریس A^2 کدام است؟

① $I + A$

② $2I + A$

③ $2I - A$

④ $I - A$

👉 ترانهاده‌ی ماتریس:

اگر در ماتریس A ، درایه‌ی ij -ام را به درایه‌ی ji -ام تبدیل کنیم، «ترانهاده» ماتریس A حاصل و با نماد A^t نمایش داده می‌شود. به زبان ساده:

سطرها در ماتریس A ، با همان ترتیب به ستون‌ها در ماتریس A^t تبدیل شوند.

❓ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. اگر $BA^t A = 52I$ باشد، ماکزیمم مقدار درایه‌های ماتریس B کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

① ۱۴

② ۱۸

③ ۲۴

④ ۲۸

👉 توجه کنید:

وجود ماتریس وارون، برخی خواص ماتریس‌ها را قوی‌تر می‌کند. دو مورد معروف:

▪ اگر $AB = \overline{O}$ یا $BA = \overline{O}$ بوده و بدانیم A وارون دارد، باید $B = \overline{O}$ باشد:

$$(AB = \overline{O} \quad |A| \neq 0) \Rightarrow B = \overline{O}$$

زیرا:

$$AB = \overline{O} \xrightarrow{A^{-1} \times} A^{-1}AB = A^{-1}\overline{O} \Rightarrow B = \overline{O}$$

▪ قانون حذف برای ماتریس وارون‌پذیر A برقرار است:

$$(AB = AC \quad \text{و} \quad |A| \neq 0) \Rightarrow B = C$$

زیرا:

$$AB = AC \xrightarrow{A^{-1} \times} A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow B = C$$